

۱) چند عدد صحیح در مجموعه جواب‌های نامعادله $۲ < \frac{۳x+۴}{x+۳} < ۴$ قرار ندارد؟

- ۱۰ (۱) ۱۲ (۲) ۱۱ (۳) ۹ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

از طرفین نامساوی $\frac{۲+۴}{۲} = ۳$ واحد کم می‌کنیم:

$$-۱ < \frac{۳x+۴}{x+۳} - ۳ < ۱ \Rightarrow -۱ < \frac{-۵}{x+۳} < ۱$$

$$\Rightarrow \left| \frac{-۵}{x+۳} \right| < ۱ \Rightarrow \frac{۵}{|x+۳|} < ۱ \Rightarrow |x+۳| > ۵$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+۳ > ۵ \\ \text{یا} \\ x+۳ < -۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > ۲ \\ \text{یا} \\ x < -۸ \end{cases} \Rightarrow R - [-۸, +۲]$$

اعداد صحیح $\{-۸, -۷, \dots, ۱, ۲\}$ در نامعادله صدق نمی‌کنند.

۲) مجموعه جواب نامعادله $\left| \frac{x+3}{2x+3} \right| > 2$ کدام است؟

- (۱) $(-\frac{9}{5}, -1)$ (۲) $(-\frac{9}{5}, -\frac{3}{2}) \cup (-\frac{3}{2}, -1)$
(۳) $(-\frac{3}{2}, -1)$ (۴) $(-\frac{9}{5}, -\frac{3}{2})$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

چون مخرج کسر مثبت می‌باشد، پس می‌توانیم طرفین وسطین کنیم.

$$|x+3| > 2|2x+3| \Rightarrow |x+3| > |4x+6|$$

به دلیل اینکه هر دو عبارت مثبت هستند، توان ۲ رساندن مجاز است:

$$(x+3)^2 > (4x+6)^2 \Rightarrow (4x+6)^2 - (x+3)^2 < 0$$

$$\xrightarrow{\text{مزدوج}} (5x+9)(3x+3) < 0 \Rightarrow x \in (-\frac{9}{5}, -1)$$

اما چون $x = -\frac{3}{2}$ ریشه مخرج است، قابل قبول نیست و باید از جواب به دست آمده حذف شود:

$$x \in (-\frac{9}{5}, -1) - \{-\frac{3}{2}\}$$

۳) نامعادله $\frac{x^3+4x}{x^2-5x+4} < 0$ برای چند عدد طبیعی برقرار است؟

- (۱) بی شمار (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

ابتدا به کمک فاکتورگیری و اتحاد جمله مشترک داریم:

$$\frac{x(x^2+4)}{(x-4)(x-1)} < 0$$

عبارت x^2+4 همیشه مثبت است و بنابراین در تعیین علامت تأثیری نمی‌گذارد. پس باید

$$P(x) = \frac{x}{(x-4)(x-1)}$$
 را تعیین علامت کنیم:

x	0	1	4
x	-	0	+
(x-4)(x-1)	+	+	0
P(x)	-	0	+
	↓		↓
	جواب	ت	جواب

پس نامعادله به ازای اعداد طبیعی ۲ و ۳ برقرار است.

④ اگر نامعادله $\frac{ax^2 - \frac{1}{p}ax - 3}{-x^2 - x - 1} \leq 3$ به ازای تمام مقادیر x برقرار باشد، a کدام است؟

- (۱) هر مقدار (۲) ۶- (۳) ۶ (۴) هیچ مقدار

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

چون $-x^2 - x - 1$ همواره منفی است ($\Delta < 0, a < 0$) پس می توان نامعادله را طرفین وسطین کنیم و جهت نامعادله را تغییر دهیم:

$$ax^2 - \frac{1}{p}ax - 3 \geq -3x^2 - 3x - 3$$

$$\Rightarrow (a + 3)x^2 + (3 - \frac{1}{p}a)x \geq 0 \quad (1)$$

برای آن که نامعادله (۱) همواره برقرار باشد، باید $\Delta \leq 0$ و ضریب x^2 مثبت باشد.

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow (3 - \frac{1}{p}a)^2 - 4(a + 3)(0) \leq 0$$

$$\Rightarrow (3 - \frac{1}{p}a)^2 \leq 0 \xrightarrow{\text{حالت تساوی}} 3 - \frac{1}{p}a = 0 \Rightarrow a = 6 \quad (2)$$

$$(3) \quad (x^2 \text{ ضریب}) > 0 \Rightarrow a + 3 > 0 \Rightarrow a > -3$$

$$\xrightarrow{\text{و (۲) اشتراک (۳)}} a = 6$$

⑤ اگر مجموعه جواب نامعادله $|\frac{2x+1}{2} - \frac{4}{5}| \geq 1$ را به صورت $(-\infty, a] \cup [b, +\infty)$ نشان دهیم، حاصل $b - a$ کدام است؟

- (۱) ۸/۰ (۲) ۱ (۳) ۶/۰ (۴) ۲

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

اگر $a > 0$ از نامساوی $|u| \geq a$ نتیجه می گیریم که $u \geq a$ یا $u \leq -a$ ؛ پس:

$$|\frac{2x+1}{2} - \frac{4}{5}| \geq 1 \Rightarrow |\frac{10x-3}{10}| \geq 1$$

$$(I) \quad \frac{10x-3}{10} \geq 1 \Rightarrow 10x - 3 \geq 10 \Rightarrow 10x \geq 13 \Rightarrow x \geq 1/3$$

$$(II) \quad \frac{10x-3}{10} \leq -1 \Rightarrow 10x - 3 \leq -10 \Rightarrow 10x \leq -7 \Rightarrow x \leq -0/7$$

$$\xrightarrow{(I) \cup (II)} (-\infty, -0/7] \cup [1/3, +\infty) \Rightarrow a = -0/7, b = 1/3$$

$$\Rightarrow b - a = 2$$

⑥ اگر جدول تعیین علامت عبارت $P(x) = kx^2 - kx + 1$ به صورت زیر باشد، مجموعه مقادیری که ka می‌تواند قبول کند، کدام است؟

x	a
$P(x)$	$\begin{array}{c c c} + & 0 & + \end{array}$

(۲) $\{۲, ۰\}$
(۴) $\{۴\}$

(۱) $\{۴, ۰\}$
(۳) $\{۲\}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

با توجه به جدول تعیین علامت مشخص می‌شود که عبارت درجه دوم $P(x)$ دارای ریشه مضاعف است، یعنی: $\Delta = ۰$

$$\Rightarrow \Delta = k^2 - 4k = 0 \Rightarrow k(k - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(x) = 4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$$

$$ka = 4\left(\frac{1}{4}\right) = 1 \Rightarrow P(x) = (2x - 1)^2 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

⑦ اگر مجموعه جواب نامعادله $\frac{x+1}{x+2} - \frac{x}{x-1} \geq 0$ به صورت $(-\infty, a) \cup [b, c)$ باشد، حاصل $2b - a + c$ کدام است؟

(۴) -۴

(۳) ۱

(۲) -۲

(۱) ۲

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

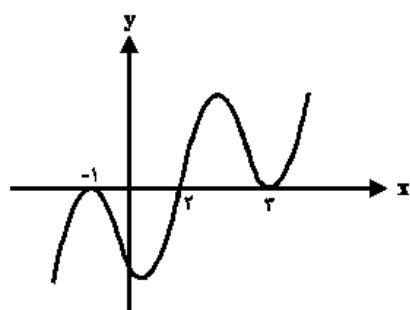
$$P(x) = \frac{x+1}{x+2} - \frac{x}{x-1} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 1 - x^2 - 2x}{(x+2)(x-1)} \geq 0 \Rightarrow \frac{-1-2x}{(x+2)(x-1)} \geq 0$$

$$\begin{array}{c|ccc} x & -2 & -\frac{1}{2} & 1 \\ \hline P(x) & + & - & + \end{array} \Rightarrow (-\infty, -2) \cup \left[-\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$\Rightarrow a = -2, \quad b = -\frac{1}{2}, \quad c = 1$$

$$\Rightarrow 2b - a + c = 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 2 + 1 = -1 + 3 = 2$$

۸) نمودار تابع f به صورت زیر است. اگر نمودار تابع $g(x) = \frac{f(x-1)}{x}$ در بازه (a, b) پایین محور x قرار گیرد، بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟



۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

نمودار تابع $g(x)$ در بازه‌ای زیر محور x قرار دارد که:

$$\frac{f(x-1)}{x} < 0$$

برای حل این نامعادله به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$f(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \\ x = 4 \end{cases}$$

x	$-\infty$	0	3	4	$+\infty$
$f(x-1)$	$-$	0	$-$	0	$+$
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$g(x)$	$+$	$-$	0	0	$+$

ت. ن.

بنابراین تابع روی بازه $(0, 3)$ پایین محور x قرار دارد، پس بیشترین مقدار $b - a$ برابر ۳ است.

۹) اگر بازه $(-1, 2)$ بزرگ‌ترین بازه‌ای باشد، که سهمی $y = x^2 - 2ax + b$ پایین‌تر از خط $y = ax + 3b$ قرار بگیرد، حاصل $a + b$ کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $-\frac{1}{3}$ (۴) صفر

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

بازه $(-1, 2)$ مجموعه جواب‌های نامعادله $x^2 - 2ax + b < ax + 3b$ است:

$$\Rightarrow x^2 - 3ax - 2b < 0$$

برای اینکه بازه $(-1, 2)$ بزرگ‌ترین بازه جواب نامعادله بالا باشد، لازم است که $x = -1$ و $x = 2$ جواب معادله $x^2 - 3ax - 2b = 0$ باشند:

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1: 1 + 3a - 2b = 0 \Rightarrow 3a - 2b = -1 \\ x = 2: 4 - 6a - 2b = 0 \Rightarrow 3a + b = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{3}, b = 1 \Rightarrow a + b = \frac{4}{3}$$

۱۰) مجموعه جواب نامعادله $\frac{x}{x-1} < \frac{3}{x^2+x-2}$ کدام است؟

- (۱) $(-3, -2)$ (۲) $(-2, 1)$
(۳) $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ (۴) $(-2, +\infty)$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

$$\begin{aligned} \frac{x}{x-1} - \frac{3}{(x+2)(x-1)} < 0 &\rightarrow \frac{x(x+2)-3}{(x+2)(x-1)} < 0 \\ \rightarrow \frac{x^2+2x-3}{(x+2)(x-1)} < 0 &\rightarrow \frac{(x-1)(x+3)}{(x+2)(x-1)} < 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -3 & -2 & 1 \\ \hline & + & 0 & - \\ & & \downarrow & \downarrow \\ & & \text{ت} & \text{ت} \\ & & \text{ن} & \text{ن} \end{array}$$

$$\rightarrow x \in (-3, -2)$$

۱۱) اگر جواب نامعادله $\frac{x+b}{2ax-3} > 0$ به صورت $(-1, 5)$ باشد، حاصل ab کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{10}$ (۲) -5 (۳) $\frac{15}{2}$ (۴) $-\frac{15}{2}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

با توجه به این که جواب نامعادله بازه $(-1, 5)$ است، بنابراین -1 و 5 ریشه های عبارت های صورت و مخرج کسر هستند. ریشه های صورت و مخرج کسر این نامعادله به صورت زیر به دست می آیند:

$$x + b = 0 \Rightarrow x = -b$$

$$2ax - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2a}$$

با توجه به ریشه های به دست آمده دو حالت پیش می آید:

(۱) $a > 0$ باشد:

در این حالت $\frac{3}{2a} > 0$ است، پس عدد 5 باید برابر این ریشه باشد.

$$\begin{cases} \frac{3}{2a} = 5 \Rightarrow a = \frac{3}{10} \\ -b = -1 \Rightarrow b = 1 \end{cases}$$

x	-1	5
x+1	- 0	+ 0
$\frac{3}{5}x-3$	- 0	+ 0
عبارت	+ 0	- 0

$$\Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$$

پس این حالت قابل قبول نیست.

(۲) $a < 0$ باشد:

در این حالت $\frac{3}{2a} < 0$ است، پس عدد -1 باید برابر این ریشه باشد.

$$\begin{cases} \frac{3}{2a} = -1 \Rightarrow a = -\frac{3}{2} \\ -b = 5 \Rightarrow b = -5 \end{cases}$$

x	-1	5
x-5	- 0	+ 0
-3x-3	+ 0	- 0
عبارت	- 0	+ 0

فق ق ق $\rightarrow -1 < x < 5$

$$\Rightarrow a \times b = -\frac{3}{2} \times -5 = \frac{15}{2}$$

۱۲) به ازای چه حدودی از m عبارت $\frac{(m+2)x^2+2mx+m-1}{-x^2+3x-4}$ همواره منفی است؟

$$(۱) \quad -2 < m$$

$$(۲) \quad -2 < m < 2$$

$$(۴) \quad m < 2$$

$$(۳) \quad 2 < m$$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

عبارت مخرج کسر همواره منفی است، زیرا در معادله آن $\Delta < 0$ و ضریب x^2 ، منفی است.

$$\Delta_{\text{مخرج}} = 3^2 - 4 \times (-4) \times (-1) = 9 - 16 = -7 < 0$$

$$0 < -1 = \text{ضریب } x^2 \text{ در مخرج کسر}$$

برای آن که مقدار کسر، همواره منفی باشد، باید عبارت صورت کسر همواره مثبت باشد، پس:

$$(۱) \quad m + 2 > 0 \Rightarrow m > -2$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow (2m)^2 - 4(m-1) \times (m+2) < 0$$

$$\Rightarrow 4m^2 - 4m^2 - 4m + 8 < 0 \Rightarrow 8 < 4m \Rightarrow 2 < m \quad (۲)$$

اشتراک (۱) و (۲)
 $\xrightarrow{\quad} 2 < m$

۱۳) اگر مجموعه جواب نامعادله $\frac{x^2}{x-1} \leq \frac{x}{1+x}$ به صورت $(-\infty, a) \cup [b, c)$ باشد، حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

$$\frac{x^2}{x-1} \leq \frac{x}{1+x}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{x-1} - \frac{x}{x+1} \Rightarrow \frac{x^3+x^2-x^2+x}{x^2-1} \leq 0 \Rightarrow \frac{x^3+x}{x^2-1} \leq 0$$

$$\frac{x(x^2+1)}{x^2-1} \leq 0 \xrightarrow{x^2+1>0} \frac{x}{x^2-1} \leq 0$$

x	-۱	۰	۱
x	-	۰	+
x ² -۱	+	-	+
$\frac{x}{x^2-1}$	-	۰	+

پس مجموعه جواب نامعادله، $(-\infty, -1) \cup [0, 1)$ است.

$$(-\infty, -1) \cup [0, 1) = (-\infty, a) \cup [b, c) \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow a+b+c = 0$$

۱۴) اگر مجموعه جواب نامعادله $|2 - |x - 1|| < 2$ به صورت $\{b\} - (a, a+2)$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$|2 - |x - 1|| < 2 \Rightarrow -2 < 2 - |x - 1| < 2$$

$$-4 < -|x - 1| < 0 \Rightarrow 0 < |x - 1| < 4$$

از نامعادله $|x - 1| > 0$ نتیجه می شود $x \neq 1$ و از نامعادله $|x - 1| < 4$ نتیجه می شود $-4 < x - 1 < 4$ ، یعنی $-3 < x < 5$.

بنابراین مجموعه جواب نامعادله $\{1\} - (-3, 5)$ است و در نتیجه $a = 3$ و $b = 1$ می باشد. پس $a+b = 4$.

۱۵) مجموعه جواب نامعادله $\frac{5x^2 - bx + 2c}{x-2} \geq 0$ به صورت $[a, 1] \cup (2, +\infty)$ است. مقدار $b - 5a$ کدام است؟

۴ (۴)

۴ (۳)

-۵ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

برای حل نامعادله از تعیین علامت استفاده می‌کنیم:

$$x = 2 \Rightarrow x - 2 = 0: \text{مخرج کسر}$$

با توجه به جواب نامعادله، $x = 1$ و $x = a$ جواب‌های معادله $5x^2 - bx + 2c = 0$ (صورت کسر) هستند. در نتیجه:

$$\xrightarrow{x=1} 5 - b + 2c = 0 \Rightarrow -b + 2c = -5 \quad (I)$$

از طرفی چون مجموع ضرایب معادله درجه دوم برابر صفر است، پس ریشه دیگر معادله برابر است با:

$$\frac{2c}{5} = a \Rightarrow 2c = 5a \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(II), (I)} -b + 5a = -5 \Rightarrow b - 5a = 5$$

۱۶) مجموعه مقادیر m که به ازای آن‌ها معادله $(x-2)(mx^2+6x+9)=0$ سه ریشه حقیقی متمایز دارد، کدام است؟

- (۱) $(-\infty, 1) - \{0\}$ (۲) $(-\infty, 1) - \{0, -\frac{21}{4}\}$ (۳) $(-\infty, -1)$ (۴) $(1, +\infty) - \{\frac{21}{4}\}$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

حاصل ضرب دو پرانتز صفر شده پس هر کدام می‌توانند صفر باشند:

$$\begin{aligned} (x-2)(mx^2+6x+9) &= 0 \\ \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ mx^2+6x+9=0 \end{cases} \end{aligned}$$

اولاً باید این معادله درجه دوم دو ریشه متمایز داشته باشد تا در مجموع سه ریشه داشته باشیم پس باید $\Delta > 0$ باشد:

$$6^2 - 4(m)(9) > 0 \Rightarrow 36 > 36m \Rightarrow 1 > m$$

ثانیاً باید $x=2$ ریشه تکراری نباشد، پس نباید $x=2$ ریشه پرانتز دوم باشد:

$$\begin{aligned} x=2 : m(2)^2 + 6(2) + 9 &\neq 0 \Rightarrow 4m + 21 \neq 0 \\ \Rightarrow m &\neq -\frac{21}{4} \end{aligned}$$

از طرفی به‌ازای $m=0$ ، پرانتز دوم، درجه دوم نخواهد بود. بنابراین:

$$m \neq 0$$

از اشتراک جواب‌ها داریم: $(-\infty, 1) - \{0, -\frac{21}{4}\}$

۱۷) نمودار سهمی $y = 3x^2 + mx + 4$ همواره بالای خط $y = -2x + 1$ قرار می‌گیرد. حدود m کدام است؟

(۲) $(-6, 6)$

(۱) $(-8, 4)$

(۴) $(-4, 8)$

(۳) $(0, +\infty)$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

نمودار سهمی $f(x) = 3x^2 + mx + 4$ بالای خط $g(x) = -2x + 1$ قرار دارد.

$$\Rightarrow f(x) > g(x) \Rightarrow 3x^2 + mx + 4 > -2x + 1$$

$$\Rightarrow 3x^2 + (m+2)x + 3 > 0$$

برای اینکه عبارت درجه دوم $3x^2 + (m+2)x + 3$ همواره مثبت باشد، باید دلتای آن منفی باشد، پس داریم:

$$\Delta = (m+2)^2 - 4(3)(3) < 0 \Rightarrow (m+2)^2 < 36$$

$$\Rightarrow |m+2| < 6 \Rightarrow -6 < m+2 < 6 \Rightarrow -8 < m < 4$$

۱۸) مجموعه همه مقادیرهای x که به ازای آن عبارت $\frac{(x^2-6x+9)\sqrt{x+5}}{x^2-x-6}$ منفی می‌باشد برابر با مجموعه جواب کدام نامعادله زیر است؟

(۱) $|x| < \frac{3}{2}$ (۲) $|x| > \frac{3}{2}$ (۳) $|x - \frac{1}{2}| > \frac{5}{2}$ (۴) $|x - \frac{1}{2}| < \frac{5}{2}$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

$$\frac{(x-3)^2 \sqrt{x+5}}{(x-3)(x+2)} \xrightarrow[\text{مخرج}]{\text{ریشه های}} x = 3, x = -5, x = -2$$

به $\sqrt{x+5}$ توجه کنید، اولاً زیرا رادیکال نمی‌تواند منفی باشد. پس $x \geq -5$ ، ثانیاً حاصل رادیکال با فرجه زوج، منفی نمی‌شود. پس $\sqrt{x+5} \geq 0$ جدول تعیین علامت را رسم می‌کنیم:

	-5	-2	3	
$x-3$		-	-	0 +
$\sqrt{x+5}$	0	+	+	+
$x+2$		-	0	+
$\frac{(x-3)\sqrt{x+5}}{x+2}$	0	+	-	+
		تن	تن	

توجه: $x = 3$ هم‌ریشه صورت است و هم‌مخرج.

با توجه به جدول تعیین علامت، حاصل عبارت در فاصله $-2 < x < 3$ منفی است. برای پاسخ می‌نویسیم:

$$-2 < x < 3 \Rightarrow -2 - \frac{1}{2} < x - \frac{1}{2} < 3 - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{5}{2} < x - \frac{1}{2} < \frac{5}{2} \Rightarrow \left| x - \frac{1}{2} \right| < \frac{5}{2}$$

۱۹) با توجه به جدول زیر که مربوط به تعیین علامت عبارت $P = \frac{ax+c}{2x^2-ax-4}$ است، حاصل $c+k$ کدام است؟

x	k	a
P	-	+

(۲) -۳

(۱) ۵

(۴) ۳

(۳) -۵

پاسخ: گزینه ۳

کسر داده شده در ریشه‌های مخرج یعنی $x = a$ و $x = k$ تعریف نشده است. از آنجایی که عبارت P در $x = a$ تغییر علامت نداده است، پس $x = a$ ریشه صورت کسر نیز می‌باشد. همچنین علامت ضریب x در صورت کسر (یعنی a) باید مثبت باشد.

$$x = a \xrightarrow{\text{در صورت}} a^2 + c = 0$$

$$x = a \xrightarrow{\text{در مخرج}} 2a^2 - a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a^2 = 4 \xrightarrow{a>0} a = 2$$

$$a^2 + c = 0 \xrightarrow{a=2} 4 + c = 0 \Rightarrow c = -4$$

$$a = 2 \xrightarrow{\text{جایگذاری در مخرج}} 2x^2 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 = k \\ x = 2 \end{cases}$$

$$c+k = -1-4 = -5$$

۲۰) مجموعه جواب نامعادله $\frac{2x^2-2x-5}{x-3} < 2x$ کدام است؟

(۱) $(\frac{1}{2}, 2)$

(۲) $(\frac{5}{4}, 3)$

(۳) $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (2, +\infty)$

(۴) $(-\infty, \frac{5}{4}) \cup (3, +\infty)$

پاسخ: گزینه ۲

$$\frac{2x^2-2x-5}{x-3} - 2x < 0 \Rightarrow \frac{2x^2-2x-5-2x^2+6x}{x-3} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{4x-5}{x-3} < 0$$

x	$\frac{5}{4}$		3	
	4			
x-3	-	0	-	+
4x-5	-	0	+	+
4x-5	+	0	-	+
x-3	+	0	-	+

$$\Rightarrow x \in (\frac{5}{4}, 3)$$

۲۱) تعداد ضربان قلب یک ورزشکار، پس از x دقیقه تمرین سنگین از رابطه $f(x) = 2x^2 - 20x + 72$ به دست می‌آید. در چه زمان‌هایی پس از یک تمرین سنگین، تعداد ضربان قلب از ۱۲۰ بیشتر است؟

- (۱) $x > 6$ (۲) $0 < x < 4$ یا (۳) $x > 12$ (۴) $6 < x < 12$

پاسخ: گزینه ۳

$$2x^2 - 20x + 72 > 120 \xrightarrow{\div 2} x^2 - 10x + 36 > 60$$

$$\Rightarrow x^2 - 10x - 24 > 0$$

عبارت $P(x) = x^2 - 10x - 24 > 0$ را تعیین علامت می‌کنیم:

$$x^2 - 10x - 24 > 0 \Rightarrow (x - 12)(x + 2) > 0$$

X		-2		12		
$x^2 - 10x - 24$		+		-		+

بنابراین چون زمان نمی‌تواند منفی باشد، $x > 12$ جواب قابل قبول است.

۲۲) در کدام بازه زیر علامت عبارت $P(x) = \frac{1}{x^2 + 2x - 15}$ تغییر نمی‌کند؟

- (۱) $[-10, -3)$ (۲) $(-5, 3)$ (۳) $[-3, 5)$ (۴) $[0, 5)$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$P(x) = \frac{1}{x^2 + 2x - 15} = \frac{1}{(x+5)(x-3)}$$

		-5		3	
$P(x)$	+		-		+
		تعریف نشده		تعریف نشده	

با توجه به گزینه‌ها در بازه $(-5, 3)$ علامت $P(x)$ تغییر نمی‌کند.

۲۳) اگر $A = \{x | -3 \leq \frac{2x-1}{3} < 1\}$ و $B = \{x | x^2 + x - 6 \leq 0\}$ آن گاه $A \cap B$ کدام است؟

(۴) $[-4, 2)$

(۳) $[-3, 2)$

(۲) $[-3, 2]$

(۱) $(-3, 2]$

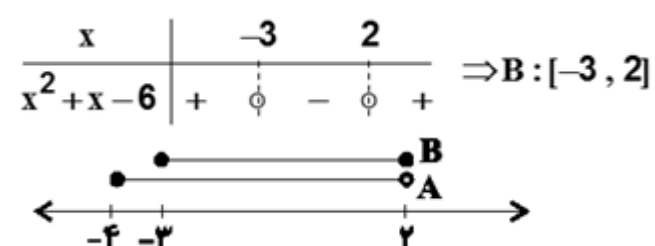
پاسخ: گزینه ۳

$$-3 \leq \frac{2x-1}{3} < 1 \xrightarrow{\times 3} -9 \leq 2x-1 < 3 \xrightarrow{+1} -8 \leq 2x < 4$$

$$\xrightarrow{\div 2} -4 \leq x < 2 \Rightarrow A = [-4, 2)$$

$$x^2 + x - 6 \leq 0$$

$$(x-2)(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$$



$$A \cap B = [-3, 2)$$

۲۴) چند عدد صحیح در نامعادله $۲ < \frac{۳x-۱}{۲x+۱} < ۱$ صدق نمی‌کند؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

نامعادله اصلی را به صورت دو نامعادله می‌نویسیم و سپس بین جواب‌ها اشتراک می‌گیریم.

$$(۱) \frac{۳x-۱}{۲x+۱} > ۱ \Rightarrow \frac{۳x-۱}{۲x+۱} - ۱ > ۰$$

$$\Rightarrow \frac{۳x-۱-(۲x+۱)}{۲x+۱} > ۰ \Rightarrow \frac{x-۲}{۲x+۱} > ۰$$

x		$-\frac{1}{2}$	۲	
$x-۲$	-	۰	-	+
$۲x+۱$	-	۰	+	+
$\frac{x-۲}{۲x+۱}$	+	۰	-	+

یا $x > ۲$ جواب (۱) : $x < -\frac{1}{2}$

$$(۲) \frac{۳x-۱}{۲x+۱} < ۲ \Rightarrow \frac{۳x-۱-۲(۲x+۱)}{۲x+۱} < ۰ \Rightarrow \frac{-x-۳}{۲x+۱} < ۰ \Rightarrow \frac{x+۳}{۲x+۱} > ۰$$

x		-۳	$-\frac{1}{2}$	
$x+۳$	-	۰	+	+
$۲x+۱$	-	-	۰	+
$\frac{x+۳}{۲x+۱}$	+	۰	-	+

(۲) جواب : $x < -۳$ یا $x > -\frac{1}{2}$

اشتراک (۱) و (۲)

$\rightarrow x < -۳$ یا $x > ۲$

پس اعداد -۳، -۳، -۱، ۰، ۱ و ۲ یعنی ۶ عدد صحیح در این نامعادله صدق نمی‌کنند.

۲۵ مقدار x در کدام بازه زیر تغییر کند تا $P(x) = \frac{x^3 - 4x}{x^2 - x + 1}$ ، دقیقاً دو بار تغییر علامت دهد؟

- (۱) $[1, 10]$ (۲) $[-1, 4]$ (۳) $[-4, 3]$ (۴) $[-6, -1]$

پاسخ: گزینه ۲

همواره برقرار است: $x^2 - x + 1 = 0 \xrightarrow{\Delta = 1 - 4 < 0} x^2 - x + 1 > 0$

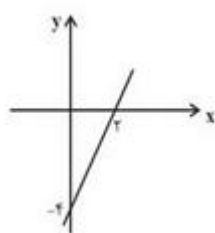
$$x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x - 2)(x + 2)$$

x	-2	0	2
$x^3 - 4x$	-	0	+
$x^2 - x + 1$	+	+	+
$P(x) = \frac{x^3 - 4x}{x^2 - x + 1}$	-	0	+

مطابق جدول تعیین علامت فوق، در بازه $[-1, 4]$ ، $P(x)$ دو بار (در $x = 0$ و $x = 2$) تغییر علامت می‌دهد.

در بازه $[-4, 3]$ ، $P(x)$ سه بار و در دو بازه $[1, 10]$ ، $[-6, -1]$ یک بار تغییر علامت می‌دهد.

۲۶ خط $y = ax + b$ در شکل زیر رسم شده است. عبارت $p(x) = \frac{ax+b}{bx+a}$ در کدام بازه نامنفی است؟



(۲) $(\frac{1}{3}, 3]$

(۴) $[\frac{1}{3}, 3)$

(۱) $(\frac{1}{2}, 2]$

(۳) $[\frac{1}{2}, 2)$

پاسخ: گزینه ۱

با توجه به اینکه نقاط $(0, -4)$ و $(2, 0)$ روی خط مورد نظر قرار دارند، معادله خط به صورت $y = 2x - 4$ است و داریم:

$$p(x) = \frac{2x-4}{-4x+2} = \frac{x-2}{-2x+1}$$

جدول تعیین علامت عبارت $p(x)$ به صورت زیر است:

	$\frac{1}{2}$	۲	
$x-2$	-	-	+
$-2x+1$	+	-	-
$p(x)$	-	+	-

$$\xrightarrow{p(x) \geq 0} x \in (\frac{1}{2}, 2]$$

۲۷) چند عدد صحیح در نامعادله $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}} > x-1$ صدق می‌کند؟

- (۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینه ۱

چون دامنه عبارت $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}$ برابر $x > 1$ است، پس هر ۳ عبارت $x-1$ ، $\sqrt{x}-1$ و $\sqrt{x-1}$ مثبت هستند و داریم:

$$\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}} > x-1 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} > \sqrt{x-1} \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} > \sqrt{x-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+1} > \sqrt{x-1}$$

با شرط $x > 1$ اولین عدد صحیح ۲ می‌شود که با در نظرگیری $x \in \mathbb{Z}; x \geq 2$ عبارت سمت راست همواره بزرگ‌تر از او عبارت سمت چپ کوچک‌تر از ۱ است. لذا هیچ عدد صحیحی در این نامعادله صدق نمی‌کند.

۲۸) با توجه به جدول تعیین علامت عبارت $P = 2x^3 + ax^2 + bx + c$ ، حاصل $a + b + c$ کدام است؟

x	-2	1
P	-	+

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) -۱
(۴) -۲

پاسخ: گزینه ۴

عبارت P در $x=1$ تغییر علامت نداده، ولی در $x=-2$ ، تغییر علامت داده است، پس با توجه به این که در عبارت P ، ضریب x^3 برابر با ۲ است، می توان نوشت:

$$P = 2(x-1)^2(x+2) \Rightarrow P = 2(x^2 - 2x + 1)(x+2)$$

$$\Rightarrow P = 2(x^3 - 2x^2 + x + 2x^2 - 4x + 2)$$

$$\Rightarrow P = 2(x^3 - 3x + 2)$$

$$\Rightarrow P = 2x^3 - 6x + 4$$

از مقایسه تساوی اخیر با $P = 2x^3 + ax^2 + bx + c$ ، داریم:

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = -6 \\ c = 4 \end{cases} \Rightarrow a + b + c = -2$$